Problemas y soluciones

Las soluciones a los problemas deben enviarse, preferiblemente, al encargado de la sección, Gabriel Fürstenheim Milerud (`problemas.matgazine@gmail.com`), en formato TEX. Una forma alternativa es entregarlas en mano en la asociación Lewis Carroll de la U. Complutense de Madrid. El plazo de entrega termina el 1 de Febrero del 2011.

También solicitamos de los lectores problemas originales (con solución) o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Para su publicación se valorará su interés matemático.

Los problemas están organizados en orden creciente de dificultad, donde • indicará que un problema es difícil y •• que es especialmente complicado. Los problemas abiertos o sugeridos sin solución se indicarán con un asterisco $\star$.

Problemas

Problema 1. *Propuesto por la redacción.*
En un tablero de ajedrez de 8×8 quitamos dos esquinas opuestas . ¿Es posible cubrir completamente el tablero con fichas de dominó de 2×1 sin que éstas se solapen o se salgan del tablero?

Problema 2. *Propuesto por la redacción. (Olimpiada Local de Madrid)*
En el sótano del castillo, 7 gnomos guardan su tesoro. El tesoro está detrás de 12 puertas, cada una de ellas con 12 cerraduras. Todas las cerraduras son distintas. Cada gnomo tiene llaves para algunas de las cerraduras. Tres gnomos cualesquiera tienen conjuntamente llaves para todas las cerraduras. Probar que entre todos los gnomos tienen por lo menos 336 llaves.

Problema 3. *Propuesto por la redacción. (Sylvester)*
Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto finito del plano tal que si una recta contiene dos puntos de S entonces contiene al menos 3. Demostrar que todos los puntos de S están alineados.

Problema 4. • *Propuesto por la redacción.*
Sea p_n el n-ésimo primo. Y $A_n(x) = x^n + p_1x^{n-1} + ... + p_{n-1}x + p_n$. Demostrar que A_n es irreducible como polinomio sobre $\mathbb{Z}[x]$.

Problema 5. •• *Propuesto por la redacción. (Erdös)*
Dados $2n - 1$ enteros, no necesariamente distintos, existen n de ellos tal que su suma es divisible por n.

Problema 6. $\star$ *Propuesto por la redacción. (Ulam)*
¿Existe un subconjunto S de $\mathbb{R}^2$ tal que S es denso y $\forall p, q \in S$, $d(p,q) \in \mathbb{Q}$, donde d es la métrica usual?

Soluciones

Problema promoción fácil. Un mago le ofrece una baraja española al espectador, que elige 5 cartas al azar. El espectador le muestra las 5 cartas al ayudante y le da las 4 que quiera. El ayudante le entrega las 4 cartas al mago, que a continuación adivina qué carta es la que queda al espectador en la mano, ¿cuál es el truco?

Solución propuesta por la redacción.

El mago y el ayudante tienen acordado de antemano un orden en la baraja. Por ejemplo, una carta es menor que otra si tiene el número menor, y si tiene el mismo número los palos se ordenan, de menor a mayor, bastos $<$ copas $<$ espadas $<$ oros. De esta manera, el tres de oros es menor que el cuatro de copas, pero el cuatro de copas es menor que el cuatro de oros. Ordenando así las cartas, el as de bastos es la primera carta y el rey de oros la última carta.

El ayudante sabe qué carta tiene el espectador en la mano. Por ejemplo el rey de bastos. Con el orden que han acordado, esta carta es la 37, y lo único que tiene que conseguir transmitirle el ayudante al mago es el número 37. Para ello, el ayudante ordena las cuatro cartas que le han dado en una de las $4! = 24$ permutaciones diferentes y a continuación se las entrega al mago boca arriba o boca abajo, con lo que puede comunicarle 48 números: tienen las permutaciones ordenadas (por ejemplo con el orden lexicográfico), la 13 permutación entregada boca arriba corresponde a 13 y entregada boca abajo a $13 + 24 = 37$. Y así el mago sabe que es la 37 carta: el rey de bastos.

También resuelto por M. Ambrona y M. Ardura.

Problema promoción difícil. ¿Existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada par de puntos $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se verifica que $f((a,b)) = \mathbb{R}$? En ese caso, ¿se puede definir de manera constructiva?

Solución al primer apartado enviada por Pablo Portilla, Universidad Complutense de Madrid (estudiante).

Consideramos el cociente algebraico $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, es decir $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$, y $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q} : x \mapsto [x]$ la proyección canónica. Y $g : \mathbb{R}/\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ una biyección que sabemos que existe pues ambos conjuntos tienen el mismo cardinal. Entonces $f = g \circ \pi$ cumple lo pedido.

También resuelto por D. Gómez y P. Martín.

Solución al segundo apartado enviada por Pablo Aguado García, Universidad Autónoma de Madrid (estudiante).

Todo número real x puede expresarse como

$$x = x_k \dots x_2 x_1 x_0 \,.\, x_{-1} x_{-2} x_{-3} \dots$$

con los dígitos x_i pertenecientes a $\{0, 1, \dots, 9\}$.

Definamos la función f como

$$\begin{aligned} f :\ & D \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = y = (-1)^k \dots y_1 y_0 \,.\, y_{-1} y_{-2} \dots, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} k &= x_{-6} - x_{-10} + x_{-14} \dots \pm x_{-2\Delta p_n} \dots \\ y_0 &= x_{-2} - x_{-4} + x_{-8} - x_{-16} + \dots \\ y_{-1} &= x_{-3} - x_{-9} + x_{-27} - x_{-81} + \dots \\ y_1 &= x_{-5} - x_{-25} + x_{-125} - x_{-625} + \dots \\ &\vdots \\ y_j &= x_{-p} - x_{-p^2} + x_{-p^3} - x_{-p^4} + \dots, \end{aligned}$$

con p el primo correspondiente y rellenando y_j en ese orden: $(0, -1, 1, 2, -2, 3, -3, \dots)$. Evidentemente, esta función no está definida para todo x real, ya que se pide que para todo primo p la suma $x_{-p} - x_{-p^2} + x_{-p^3} - x_{-p^4} + \dots$ converja y como es suma de enteros, x_{-p^n} tiene que ser eventualmente 0 para cada primo. Además, no puede tener infinitos números distintos de 0 a la izquierda, por tanto x_{-p^n}, es siempre 0 para los $2k$-ésimos primos a partir de un cierto k_0. Para un x que no tenga imagen definida de la anterior manera le asignamos 0. Esto también evita que si escribimos un número de dos formas posibles (esto es, terminando en $999\dots$ o terminando en 0) le asignemos dos números diferentes.

Ejemplos:

1. Si $x = 73{,}269813576000\ldots$, entonces

$$\begin{aligned} k &= 3 - 0 + 0 \ldots \\ y_0 &= 6 - 8 + 7 - 0 + 0 - 0 + \ldots = 5 \\ y_{-1} &= 9 - 6 + 0 - 0 + 0 - 0 + \ldots = 3 \\ y_1 &= 1 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + \ldots = 1 \\ y_{-2} &= 5 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 + \ldots = 5 \end{aligned}$$

   Los demás son 0. Por tanto, $f(x) = -15{,}35$.

2. Si $x = 182{,}1263000\ldots$, entonces

$$\begin{aligned} k &= 0 \\ y_0 &= 2 - 3 + 0 - 0 + \ldots = -1 \\ y_{-1} &= 6 - 0 + 0 - 0 + \ldots = 6 \end{aligned}$$

   Los demás son 0. Pero como y_0 no está entre 0 y 9 y con su representación decimal alternativa (terminando en $9999\ldots$) tampoco podemos aplicar este criterio, por tanto $f(x) = 0$.

3. Si $x = 0{,}0220202000\ldots$ (hay un 2 si el decimal es un número primo), entonces

$$\begin{aligned} k &= 0 \\ y_r &= 2 - 0 \ldots = 2 \end{aligned}$$

   Luego no podemos definir $f(x)$ de esta manera, pues el número sería $\ldots 222{,}222\ldots$. Como no tiene otra expresión decimal en la que se pueda definir, $f(x) = 0$.

4. Si $x = 0,02999\ldots$, no podríamos definir $f(x)$ con esta representación decimal, pero si lo representamos como $x = 0,03$ sí, por tanto $f(x) = 3$.

Sea ahora (a, b) un intervalo abierto en $\mathbb{R}$, tenemos que comprobar que f es sobreyectiva en (a, b). Sea $y = (-1)^k \ldots y_2 y_1 y_0 \,.\, y_{-1} y_{-2} \ldots$, veamos que existe $x = \ldots x_2 x_1 x_0 \,.\, x_{-1} x_{-2} x_{-3} \ldots$ perteneciente a (a, b) tal que $f(x) = y$.

La condición x pertenece a (a, b) implica que los primeros dígitos están determinados. Para un cierto s los dígitos x_{s-1}, $x_{s-2}, \ldots$ son arbitrarios.

Puesto que la preimagen de y pertenece a (a, b) los primeros términos de las sumas y_0, y_{-1}, $y_1, \ldots$ están fijados. Pero como los siguientes valores a x_{s-2} son libres, podemos tomarlos de tal manera que se ajusten a los valores de y_i pedidos. Por ejemplo, si

$$(a,b) = \left(\frac{\pi}{10}, 0{,}3141894\right) = (0{,}3141\mathbf{5}926\ldots, 0{,}3141\mathbf{8}94),$$

e $y = 12{,}888\ldots$, se está imponiendo que x es de la forma $0{,}3141x_5x_6x_7\ldots$ con x_5 perteneciente a $\{5,6,7,8\}$; x_6 tomará unos valores u otros en función de x_5, etc. Pero es suficiente tomar $x_5 = 6$, $x_6 = 0$ y así el resto de valores pueden ser arbitrarios. Por tanto, una preimagen x de y, una vez fijados $x_5 = 6$, $x_6 = 0$, es cualquier x que cumpla:

$$\begin{aligned} k &= 0 - x_{-10} + x_{-14}\ldots \\ y_0 &= 1 - 4 + x_{-8} - x_{-16} + \ldots = 2 \\ y_{-1} &= 4 - x_{-9} + x_{-27} - x_{-81} + \ldots = 8 \\ y_1 &= 6 - x_{-25} + x_{-125} - x_{-625} + \ldots = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

y evidentemente hay infinitas soluciones, luego y tiene preimagen en (a,b). Lo mismo se hace para a y b arbitrarios.

Otros ejemplos de funciones constructivas con estas propiedades son la función 13 de J.H. Conway (el mismo de “Game of life”) o la sugerida por Miguel Ambrona, disponible en nuestra página web (`www.matgazine.tk`).

También resuelto por M. Ambrona.

* * *