

# Matemáticas para sobrevivir. El problema de Josefo.

## *Introducción. Historia y leyenda del problema.*

Este es sólo un ejemplo más de los muchos problemas que, siendo conocidos desde hace siglos, habiendo pasado por las mentes de generaciones de matemáticos, siguen albergando cuestiones para las que todavía no tenemos respuesta.

Las primeras referencias en las que aparece el problema datan del siglo I de nuestra era, en el periodo de las llamadas guerras judeo-romanas. Según cuenta el historiador judío Flavio Josefo, él y cuarenta soldados camaradas fueron capturados por los romanos después de la caída de Jotapata. Antes que rendirse, decidieron acabar ellos mismos con sus vidas. Para hacerlo, se dispusieron en un círculo y acordaron que irían contando de tres en tres, de forma que cada tercer soldado sería ejecutado por la persona de su izquierda. El último hombre que quedara con vida tendría que suicidarse. Según cuenta la leyenda, Josefo calculó rápidamente cuál sería la posición del último hombre en morir para colocarse allí, y una vez hubieron muerto sus compatriotas, se entregó a los romanos. Josefo, sin embargo, en su obra *Las Guerras de los Judíos*, Libro III, Capítulo 8, dice que el orden de ejecución fue determinado por sorteo, y que él y su mejor amigo se salvaron tal vez por azar, o quizás por la divina intervención en el sorteo.

El problema que nos ocupa reaparece en la Edad Media, en la obra de Abraham ben Meir ibn Ezra (1092-1167), más conocido como Rabbi Ben Ezra, uno de los muchos escolares que vivieron y estudiaron en el Califato de Córdoba.

Otras versiones del problema aparecen en la matemática oriental. Un ejemplo es el libro datado en 1627 del matemático japonés Yoshida Koyu llamado *Tratado sobre los grandes y pequeños números*, en el que se explica la versión japonesa del problema de Josefo. En ésta se ve involucrada una familia con 30 hijos, la mitad de ellos del primer matrimonio del padre, y la segunda de su segunda mujer. Para elegir al heredero de las propiedades de sus padres, se disponen los treinta en un círculo y se empieza a contar de diez en diez, de forma que el décimo de cada tanda es eliminado. La madre del primer matrimonio dispone a sus hijos de forma que los quince primeros eliminados sean los de la otra mujer, pero cuando ya han sido eliminados 14, el padre decide cambiar el sentido de giro. Así, todavía hay una oportunidad para el hijo del segundo matrimonio que no ha sido eliminado. El problema es hallar la posición que debe ocupar.

## El problema clásico.

### Problema.

Se tienen  $n$  personas entorno a un círculo, ordenadas y numeradas desde la primera a la  $n$ -ésima. Empezando por la persona número 1, se saltan  $m - 1$  personas y se mata a la  $m$ -ésima. A continuación se saltan otras  $m - 1$  personas y se ejecuta a la siguiente. El proceso continúa hasta que sólo quede una. El objetivo es encontrar el lugar inicial en el círculo para sobrevivir  $J_m(n)$ , dados  $n$  y  $m$ .

El problema es sencillo cuando  $m = 2$ . En este caso, en la primera vuelta son eliminados los números pares. Si en principio había  $2n$  personas, tras matar las  $n$  primeras se obtiene otro círculo de  $n$  personas, de forma que la persona  $i$ -ésima de este nuevo círculo se corresponde con la  $2i - 1$  del primero. En otro caso, si al principio teníamos  $2n + 1$ , tras la muerte de  $n + 1$  personas obtenemos otro círculo de  $n$  personas, y ahora la persona  $i$ -ésima de éste se corresponde con la  $2i + 1$  del círculo de partida. Se establece así la recurrencia siguiente:

$$\begin{aligned} J(1) &= 1 \\ J(2n) &= 2J(n) - 1 \\ J(2n + 1) &= 2J(n) + 1 \end{aligned}$$

Ahora ya podemos construir rápidamente una tabla de valores para  $J_2(n)$ :

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Se demuestra por inducción la fórmula explícita

$$J(2^k + l) = 2l + 1$$

con  $k \geq 0$  y  $0 \leq l < 2^k$ . Esto lo podemos expresar únicamente en función de  $n$  como  $J(n) = 1 + 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor})$ , donde  $\lfloor x \rfloor$  denota la aproximación entera por debajo de  $x$ , es decir, la parte entera de  $x$ .

Otra forma de ver  $J_2(n)$  es poniendo  $n$  en base 2. Así,

$$\begin{aligned} n &= (1 b_{k-1} b_{k-2} \dots b_1 b_0)_2 \\ l &= (0 b_{k-1} b_{k-2} \dots b_1 b_0)_2 \\ 2l &= (b_{k-1} b_{k-2} \dots b_1 b_0 0)_2 \\ 2l + 1 &= (b_{k-1} b_{k-2} \dots b_1 b_0 1)_2 \\ J(n) &= (b_{k-1} b_{k-2} \dots b_1 b_0 b_k)_2 \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de que  $b_k = 1$ . Por tanto, hemos probado que

$$J((b_k b_{k-1} \dots b_1 b_0)_2) = (b_{k-1} b_{k-2} \dots b_1 b_0 b_k)_2,$$

es decir, en base 2, la imagen de  $n$  se obtiene simplemente eliminando el primer dígito y poniéndolo en la última posición. Esto de ninguna manera quiere decir que la función sea periódica, pues los ceros a la izquierda se van suprimiendo, de forma que el proceso se estabiliza cuando  $n$  es de la forma  $2^k - 1$ , cuya representación binaria está formada enteramente por unos. Entonces se tiene  $J(2^k - 1) = 2^k - 1$ .

***El caso  $m \geq 3$ .***

La cosa no es tan sencilla cuando el parámetro de eliminación es 3. Una forma de abordar el problema (sigamos [2]) es asignar un nuevo número a cada uno que no es eliminado. Así, 1 y 2 pasan a ser  $n + 1$  y  $n + 2$ , luego 3 es eliminado; 4 y 5 pasan a ser  $n + 3$  y  $n + 4$ , luego 6 es eliminado;  $\dots$ ;  $3k + 1$  y  $3k + 2$  pasan a ser  $n + 2k + 1$  y  $n + 2k + 2$ , luego  $3k + 3$  es eliminado;  $\dots$  luego  $3n$  es eliminado (o sobrevive). Por ejemplo, cuando  $n = 11$ , los números son

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13		14	15		16	17		18	19
	20		21			22	23			24
	25					26	27			
	28					29				
	30					31				
						32				
						33				

La  $k$ -ésima persona eliminada acaba con el número  $3k$ , así que podremos saber cuál es el superviviente si podemos encontrar el número original de la persona número  $3n$ .

Si  $N > n$ , la persona número  $N$  debe tener un número previo, y podemos encontrarlo así: Se tiene  $N = n + 2k + 1$  ó  $N = n + 2k + 2$ , luego  $k = \lfloor (N - n - 1)/2 \rfloor$  y el número previo es  $3k + 1$  ó  $3k + 2$ , respectivamente, es decir,  $3k + (N - n - 2k) = k + N - n$ . Por tanto, podemos calcular el número del superviviente  $J_3(n)$  mediante el siguiente algoritmo:

$$N := 3n$$

$$\text{mientras } N > n, \text{ haz } N := \left\lfloor \frac{N - n - 1}{2} \right\rfloor + N - n;$$

$$J_3(n) := N$$

Usando la variable  $D = 3n + 1 - N$  en vez de  $N$ , se simplifica bastante este algoritmo. Así,

$$\begin{aligned} D &:= 3n + 1 - \left( \left\lfloor \frac{(3n + 1 - D) - n - 1}{2} \right\rfloor + (3n + 1 - D) - n \right) \\ &= n + D - \left\lfloor \frac{2n - D}{2} \right\rfloor = D - \left\lfloor \frac{-D}{2} \right\rfloor = D + \left\lceil \frac{D}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{2}D \right\rceil \end{aligned}$$

Ahora reescribamos nuestro algoritmo como

$$D := 1$$

$$\text{mientras } D \leq 2n, \text{ haz } D := \left\lceil \frac{3}{2}D \right\rceil;$$

$$J_3(n) := 3n + 1 - D$$

Algo parecido podemos hacer para cualquier otro parámetro  $m$  de eliminación mayor que 3. Así, en general:

$$D := 1$$

$$\text{mientras } D \leq (m - 1)n, \text{ haz } D := \left\lceil \frac{m}{m - 1}D \right\rceil;$$

$$J_m(n) := mn + 1 - D,$$

que, en forma de recurrencia, se expresa como

$$\begin{aligned} D_0^{(m)} &= 1; \\ D_n^{(m)} &= \left\lceil \frac{m}{m - 1}D_{n-1}^{(m)} \right\rceil, \quad \text{con } n > 0. \end{aligned}$$

Esta sucesión no parece estar relacionada con ninguna función familiar de manera sencilla, exceptuando cuando  $m = 2$ . Por eso, no es probable que exista alguna fórmula cerrada simple y elegante. Pero si suponemos la sucesión  $D_n^{(m)}$  como conocida, entonces es fácil describir la solución generalizada del problema de Josefo: El superviviente  $J_m(n)$  es  $mn + 1 - D_k^{(m)}$ , donde  $k$  es el menor entero para el cual  $D_k^{(m)} > (m - 1)n$ .

### *Una aproximación.*

En [3] podemos ver cómo se puede aproximar la fórmula general  $J_m(n)$ . Aquí sólo expondremos los principales resultados (las demostraciones se pueden encontrar en el artículo citado).

**Teorema 1.** *Para cada entero  $m \geq 2$ , existe un número real  $K(m)$  tal que*

$$D_n(m) = K(m) \left( \frac{m}{m-1} \right)^n + \epsilon_{n,m},$$

donde  $\epsilon_{n,2} = 0$  y si  $m \geq 3$ , entonces

$$-(m-2) < \epsilon_{n,m} \leq 0 \quad (n \geq 0).$$

Como corolario trivial, notemos que  $K(2) = 1$ , y de aquí sigue la ya conocida fórmula

$$J_2(n) = 1 + 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

**Corolario 1.** *Tenemos la “fórmula exacta”*

$$D_n^{(3)} = \left\lfloor K(3) \left( \frac{3}{2} \right)^n \right\rfloor \quad (n = 0, 1, \dots)$$

y así

$$J_3(n) = 3n + 1 - \left\lfloor K(3) \left( \frac{3}{2} \right)^{\lceil \log_{\frac{3}{2}} \left( \frac{2n+1}{K(3)} \right) \rceil} \right\rfloor \quad (n = 0, 1, \dots)$$

Aquí, la constante es  $K(3) = 1,62227050288476731595695098289932411\dots$

### *Permutaciones de Josefo.*

**Definición 1.** *Se define una permutación de Josefo  $P(n, m)$  como una permutación de  $n$  elementos resultado de aplicar la eliminación de Josefo con el parámetro  $m$ .*

Ejemplos:

$$P(7, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P(5, 60) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

De las  $n!$  permutaciones posibles sólo son de Josefo  $L(n)$ , siendo  $L(n) = \text{mcm}(1, 2, \dots, n)$ , dado que  $P(n, m) = P(n, m + L(n))$ , porque  $L(n) \equiv 0 \pmod{1, \dots, n}$ .

Estudiando las permutaciones como subconjunto de  $P_n$ , podemos ver enseguida que son subgrupo de  $(P_n, \circ)$  con la composición de aplicaciones cuando  $n = 4$  (el subgrupo alternado), pero en general no lo son para  $n > 4$ . Sin embargo, veamos algunas propiedades que sí cumplen.

Sea  $\mathcal{PJ}_n$  el conjunto de las permutaciones de Josefo de  $n$  elementos. Definimos la aplicación  $f$  como

$$\begin{aligned} f: \quad \mathcal{PJ}_n &\longrightarrow \mathcal{PJ}_{n-1} \\ P(n, m) &\longmapsto P(n-1, m) \end{aligned}$$

Consideremos la permutación de Josefo  $P(n, m) = (a_1 a_2 \dots a_n)$ . Entonces,  $f(P(n, m)) = P(n-1, m) = (b_2 b_3 \dots b_n)$ , donde  $b_i = a_i + (n - a_1)$ , y  $b_i \in \mathbb{Z}_n$ .

Los sistemas de congruencias asociados a las dos permutaciones son

	Permutación	Sistema de congruencias de $m$
$P(n, m)$	$(a_1 a_2 \dots a_n)$	$r_n, r_{n-1}, \dots, r_1 \pmod{n, n-1, \dots, 1}$
$P(n-1, k)$	$(b_2 b_3 \dots b_n)$	$r_{n-1}, \dots, r_1 \pmod{n-1, \dots, 1}$

Claramente,  $f$  es suprayectiva y en general no inyectiva, salvo si  $\text{m.c.m}(1, \dots, n) = \text{m.c.m}(1, \dots, n-1)$ , en cuyo caso es biyectiva.

Supongamos que  $P(n-1, m)$  es composición de  $t$  transposiciones. Veamos que, a partir de  $Id_n = (1 2 \dots n)$  podemos obtener la permutación  $P'(n, m) = (n b_2 b_3 \dots b_n)$  mediante  $n-1+t$  transposiciones (probablemente también mediante menos). Ahora, partiendo de  $P'(n, m)$ , podemos obtener  $P(n, m)$  mediante  $(n-1)(n-r_n)$  transposiciones (recordemos que  $b_i = a_i + (n - a_1) = a_i + (n - r_n)$ , en  $\mathbb{Z}_n$ ). Por tanto, denotando  $[\sigma]_2$  la paridad de la permutación  $\sigma$ , tenemos

$$[P(n, m)]_2 = n-1+t+(n-1)(n-r_n) = t+(n-1)(1+n-r_n) \pmod{2},$$

es decir,

$$[P(n, m)]_2 = [P(n-1, k)]_2 + (n-1)(1+n-r_n) \pmod{2}.$$

**Proposición 1.** *Las permutaciones de Josefo de  $4k$  y  $4k+1$  elementos son pares, mientras que exactamente la mitad de las permutaciones de Josefo de  $4k+2$  y  $4k+3$  elementos son pares.*

*Demostración.* Por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 1$  la comprobación es trivial. Supongamos ahora que, para cierto  $k \geq 0$ , todas las permutaciones de Josefo de  $n - 1 = 4k + 1$  elementos son pares. Entonces,  $(n - 1)(1 + n - r_n)$  es par si  $r_n \equiv 1 \pmod{2}$ , y es impar si  $r_n \equiv 0 \pmod{2}$ . Pero  $r_n \equiv r_2 \pmod{2}$ , y como exactamente la mitad de las permutaciones de Josefo tienen  $r_2 = 1$  y la otra mitad tienen  $r_2 = 2$ , se sigue que la mitad de las permutaciones de  $4k + 2$  elementos son pares y la otra mitad impares. Concretamente, son pares aquellas con  $r_2 = 1$  e impares aquellas con  $r_2 = 2$ .

Ahora, si  $n - 1 = 4k + 2$ , entonces  $(n - 1)(1 + n - r_n)$  es par para todos los  $r_n$ ; luego la mitad de las permutaciones de  $4k + 3$  elementos son pares y la otra mitad impares.

Sigamos. Si  $n - 1 = 4k + 3$ , entonces  $(n - 1)(1 + n - r_n)$  es par si  $r_2 = 1$ , y es impar si  $r_2 = 2$ . Pero las permutaciones de  $4k + 3$  elementos con  $r_2 = 1$  son pares, mientras que las que tienen  $r_2 = 2$  son impares. Por tanto, todas las permutaciones de Josefo de  $4k + 4$  elementos son pares.

Por último, si  $n - 1 = 4k$ , entonces  $(n - 1)(1 + n - r_n)$  es par para todos los  $r_n$ , luego todas las permutaciones de  $4k + 1$  elementos son pares.

□

## *Un problema abierto.*

### **Problema.**

*Supongamos que Josefo se encuentra en una posición dada  $j$ , pero puede elegir el parámetro de eliminación  $m$ . ¿Puede salvarse siempre?*

La respuesta es sí. Podemos encontrar la solución a este problema en [2] y [4], la cual usa como argumento central el postulado de Bertrand (conjeturado por Bertrand en 1845 y demostrado por Chebyshev en 1850), según el cual hay siempre un primo  $p$  con  $n/2 < p < n$ .

Pero una generalización de este problema sigue aún sin resolver.

### **Problema.**

*Diremos que un subconjunto de Josefo de  $\{1, 2, \dots, n\}$  es un conjunto de  $p$  números para los cuales, existe algún  $k$  tal que las personas con los otros  $n - k$  números (los “chicos malos”) son eliminadas primero. Con  $n = 9$ , tres de los  $2^9$  subconjuntos no son de Josefo, a saber,  $\{1, 2, 5, 8, 9\}$ ,  $\{2, 3, 4, 5, 8\}$ , y  $\{2, 5, 6, 7, 8\}$ . Hay 13 subconjuntos que no son de Josefo con  $n = 12$ , ninguno para otros valores de  $n \leq 12$ . ¿Existen subconjuntos que no son de Josefo para  $n > 12$ ?*

Lo que podemos decir sobre la solución de este problema [2] es que el orden de ejecución puede ser computado en  $O(n \log n)$  etapas para todos  $n$  y  $m$ . Bjorn Poonen (Ver las referencias en [2]) probó que no existen subconjuntos de Josefo con exactamente cuatro “chicos malos” cuando  $n \equiv 0 \pmod{3}$  y  $n \geq 9$ ; de hecho, el número de estos conjuntos es al menos  $\epsilon \binom{n}{4}$  para cierto  $\epsilon > 0$ . También comprobó que el otro único  $n < 24$  con subconjuntos que no son de Josefo es  $n = 20$ , el cual tiene 236 de estos conjuntos con  $k = 14$  y dos con  $k = 13$ . (Uno de estos últimos es  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 14, 15, 16, 17\}$ ; el otro es su reflexión con respecto a 21). Hay un único subconjunto que no es de Josefo con  $n = 15$  y  $k = 9$ , se trata de  $\{3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13\}$ .

## **Referencias**

- [1] R. COOKE *The History of Mathematics: A brief course*  
Wiley, 1997, 247-248
- [2] R. L. GRAHAM, D. E. KNUTH, O. PATASHNIK, *Concrete Mathematics: A foundation for Computer Science*,  
Addison Wesley, 2nd ed., 1994.

- [3] A. M. ODLYZKO, H. S. WILF, *Functional iteration and the Josephus problem*.
- [4] P. SCHUMER, *The Josephus Problem: Once More Around*, *Mathematics Magazine*.
- [5] R. STEPHAN, *On a sequence related to the Josephus problem*.  
[www.arxiv.org/abs/math/0305348v1](http://www.arxiv.org/abs/math/0305348v1)

*Para la realización de este artículo me he basado en el trabajo de recopilación e investigación que realizamos mis compañeros Pedro Castillejo y Álvaro González y yo en el curso 2009-2010 sobre el problema de Josefo, en el que contamos con la inestimable ayuda de Merche Sánchez, la cual nos proporcionó los libros y artículos de los que he sacado la información para la mayor parte de este artículo.*

*Víctor Arnaiz Solórzano*

\* \* \*